

## Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 1. Übungsblatt

### Aufgabe 1: (6 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die Koeffizienten einer Finite-Differenzen-Formel mit fünf Koeffizienten

$$u''(x) \approx c_1 u(x - 3h) + c_2 u(x - 2h) + c_3 u(x - h) + c_4 u(x) + c_5 u(x + h).$$

Dabei soll die Ordnung der Formel maximiert werden. Machen Sie den Ansatz  $u(x) = e^{iwx}$  und fahren Sie analog zur Vorlesung fort. Die Taylor-Entwicklung dürfen Sie auch mit Maple/Python durchführen.

- (b) Wir ersetzen nun die letzte Auswertungsstelle  $u(x + h)$  durch  $u(x + 2h)$  und wollen erneut die Koeffizienten einer Finite-Differenzen-Formel berechnen. Wieso lässt sich der Ansatz aus (a) nicht verfolgen? Verwenden Sie eine andere Methode, um die Koeffizienten zu berechnen. Auch hier dürfen Sie für lange Rechnungen Maple/Python hinzuziehen.

### Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u \in C^\infty(\mathbb{R})$  eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion. Wir betrachten die Funktion auf einem gegebenen Intervall  $[a, b]$ . Gegeben sei ein äquidistantes Gitter  $x_i, i = 0, \dots, n$  mit  $x_0 = a$  und  $x_n = b$ , d. h.  $x_i - x_{i-1} = h, i = 1, \dots, n$ . Im Folgenden sei  $u_i = u(x_i)$ .

- (a) Bestimmen Sie eine Approximation vierter Ordnung an  $u''(x_i)$  unter Benutzung der Punktwerte  $u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}$ . Eine Approximation zweiter Ordnung mithilfe der Werte  $u_{i-1}, u_i, u_{i+1}$  haben Sie bereits in der Vorlesung gesehen.
- (b) Es sei  $x_{i-\frac{1}{2}} = x_{i-1} + \frac{h}{2}, i = 1, \dots, n$ . Durch

$$U_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x) dx$$

ist dann der Durchschnittswert von  $u$  auf dem Intervall  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  gegeben. Bestimmen Sie eine Beziehung zwischen den Punktwerten  $u_i$  und den Durchschnittswerten  $U_i$ . Geben Sie mindestens die ersten zwei von Null verschiedenen Summanden der entstehenden Transformation explizit an.

- (c) Bestimmen Sie nun eine Approximation zweiter und vierter Ordnung an  $u''(x_i)$  unter Benutzung der Durchschnittswerte  $U_{i-1}, U_i, U_{i+1}$  bzw.  $U_{i-2}, U_{i-1}, U_i, U_{i+1}, U_{i+2}$ . Unterscheiden sich die Formeln von denen aus Aufgabenteil (a)?

