MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

26. JUNI 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 9. Übungsblatt

Aufgabe 30: Leiten Sie die Koeffizienten (b, A) für die Kuttasche 3/8-Regel her.

Aufgabe 31: Bestimmen Sie die Koeffizienten β_0, β_1, β_2 des 2-Schritt Adams-Moulton Verfahrens auf zwei verschiedenen Wegen:

1. Unter Verwendung der in der Vorlesung hergeleiteten Konsistenzbedingungen.

2. Unter Verwendung der Beziehung

$$u(t_{n+2}) = u(t_{n+1}) + \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} f(u(s))ds.$$

Approximieren Sie das Integral, indem Sie das Interpolationspolynom durch $f(U^n)$, $f(U^{n+1})$ und $f(U^{n+2})$ exakt integrieren.

Aufgabe 32: Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome $\rho(\zeta)$ und $\sigma(\zeta)$ für die folgenden linearen Mehrschrittverfahren. Verifizieren Sie die Konsistenz der beiden Verfahren.

(a) 3-Schritt Adams-Bashforth Verfahren

$$U^{n+3} = U^{n+2} + \frac{k}{12}\left(5f(U^n) - 16f(U^{n+1}) + 23f(U^{n+2})\right)$$

(b) 3-Schritt Adams-Moulton Verfahren

$$U^{n+3} = U^{n+2} + \frac{k}{24}\left(f(U^n) - 5f(U^{n+1}) + 19f(U^{n+2}) + 9f(U^{n+3})\right)$$

b.w.

Aufgabe 33: Es soll die Ausbreitung der Krankheit Ebola modelliert werden. Sei dazu N die Anzahl der gesamten Bevölkerung. Im SIRD-Modell (susceptible - infectious - recovered - dead) wird diese in die vier Gruppen S, der gesunden Personen, die sich anstecken können, I, der infizierten Personen, R, der genesenen Personen und D, der toten Personen, unterteilt. Demnach soll $S+I+R+D=N$ gelten. Die Entwicklung der Krankheit wird mit dem folgenden Modell modelliert:

$$
\begin{aligned}
S_t &= -\beta SI + \delta R \\
I_t &= \beta SI - \nu I - \mu I \\
R_t &= \nu I - \delta R \\
D_t &= \mu I
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Innerhalb einer Zeiteinheit

- stecken sich βSI ansteckungsgefährdete Personen an. β beschreibt dabei die Infektionsrate.
- sterben μI infizierte Personen.
- genesen νI infizierte Personen.
- werden δR genesene Personen wieder ansteckungsgefährdet.

Benutzen Sie die in matlab eingebauten Funktion *ode45*, um ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren auf das gestellte Problem anzuwenden. Benutzen Sie außerdem *ode113*, um ein Mehrschrittverfahren auf das gestellte Problem anzuwenden.

Benutzen Sie dabei die Paramter $\beta = 0.000165, \mu = 0.73, \nu = 0.27, \delta = 0.23$ sowie
$T_{final} = 20, S_0 = 21950, I_0 = 50, R_0 = 0, D_0 = 0, N = 22000$.

Plotten Sie jeweils ihre Ergebnisse.

Bricht eine Epidemie aus? Falls ja, finden Sie eine andere sinnvolle Wahl der Parameter, sodass keine Epidemie ausbricht. Falls nein, finden Sie eine andere sinnvolle Wahl der Parameter, sodass eine Epidemie ausbricht.

Abgabe am 3. Juli 2017 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 10. Juli 2017.