MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

19. JUNI 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 25: Beweisen Sie die folgende Aussage:

Ein explizites Runge-Kutta Verfahren (b,c,A) ist genau dann invariant gegen Autonomisierung, wenn es konsistent ist und

$$c_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, s$$

erfüllt.

Aufgabe 26: Bestimmen Sie die Konsistenzordnung der folgenden Runge-Kutta Verfahren:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 0 & 1/6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

Aufgabe 27: Betrachten Sie das AWP

$$\begin{aligned} u_1' &= 2u_1 \\ u_2' &= 3u_1 + 2u_2 \end{aligned}$$

mit Anfangswerten $u_1(0)$ und $u_2(0)$. Lösen Sie dieses Problem auf zwei verschiedene Wege:

(a) Lösen Sie die erste Gleichung, die nur u_1 enthält, und setzen Sie die Lösung in die zweite Gleichung ein, um eine nichthomogene lineare Gleichung für u_2 zu erhalten. Lösen Sie diese mit Duhamels Prinzip.

(b) Schreiben Sie das System als $u' = Au$ und berechnen Sie die e^{At}, um die Lösung zu erhalten.

Aufgabe 28: Zeigen Sie, dass die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'(t) = \frac{1}{t^2 + u(t)^2}, \quad t \geq 1$$

eine eindeutige Lösung auf $t \in [1, \infty)$ für jeden Startwert $u(1) = \mu$ besitzt.

b.w.

Aufgabe 29: Die DGL

$$x'' = -\frac{x}{r^3}, \qquad x(0) = 1 - \epsilon, \quad x'(0) = 0,$$
$$y'' = -\frac{y}{r^3}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}},$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

beschreibt eine orbitale Bahn in zwei Raumdimensionen. Die exakte Lösung ist gegeben durch

$$x = \cos(u) - \epsilon,$$
$$y = \sqrt{1-\epsilon^2}\sin(u),$$

wobei u die Gleichung

$$u - \epsilon\sin(u) - t = 0$$

erfüllt.

(a) Formulieren Sie die DGL als System erster Ordnung.

(b) Plotten Sie die exakte Lösung für $t \in [0, 20]$. Das Intervall sollte dabei in mindestens 100 Punkte unterteilt werden.

Hinweis: Zur Bestimmung von u können Sie eine beliebige Implementation des Newton Algorithmus verwenden.

(c) Implementieren Sie das explizite Euler Verfahren.

(d) Implementieren Sie das verbesserte Euler Verfahren.

(e) Implementieren Sie das klassische RK Verfahren 4. Ordnung.

(f) Wenden Sie die drei implementierten Verfahren auf obiges Testbeispiel an. Plotten Sie die numerischen Lösungen zusammen mit der exakten Lösung für $t \in [0, 20]$, $k = \frac{20}{100}, \frac{20}{200}, \frac{20}{400}$ und $\epsilon = 0.1, 0.3$.

Abgabe am 26. Juni 2017 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 3. Juli 2017.