Mathematisches Institut

Prof. Dr. Christiane Helzel
David Kerkmann

5. Juni 2017

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 7. Übungsblatt

Aufgabe 20: Wir betrachten das Anfangswertproblems

$$v''(t) = -4v(t), \quad v(0) = \alpha,\ v'(0) = \sigma.$$

1. Formulieren Sie die Differentialgleichung als System erster Ordnung.
2. Bestimmen Sie die Lösung.

Aufgabe 21:

1. Implementieren Sie das explizite Eulerverfahren.
2. Implementieren Sie das implizite Eulerverfahren. Benutzen Sie zur Lösung der nichtlinearen Gleichung in jedem Zeitschritt das Newton-Verfahren.
3. Implementieren Sie das Trapez-Verfahren. Benutzen Sie zur Lösung der nichtlinearen Gleichung in jedem Zeitschritt das Newton-Verfahren.
4. Testen Sie ihre Verfahren an folgendem Anfangswertproblem, indem Sie ihre Lösungen und die exakte Lösung in einem Plot darstellen. Als Werte für die Endzeit T und den Zeitschritt k können Sie z.B. $T = 40$ und $k = 1$ wählen.

$$y'(x) = \frac{y(x)}{4}\left(1 - \frac{y(x)}{20}\right), \quad y(0) = 1.$$

$$y_{ex}(x) = \frac{20}{1 + 19e^{-x/4}}$$

Aufgabe 22: Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Sei I ein Intervall, in dem eine stetig differenzierbare Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(u(t), t) \\ u(t_0) &= \eta \end{aligned} \tag{1}$$

existiert, so löst u auch die *Volterrasche Integralgleichung*

$$u(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} f(u(\tau), \tau) d\tau. \tag{2}$$

Ist umgekehrt f eine stetige Funktion und u eine stetige Lösung von (2) in I mit $t_0 \in I$, so ist u stetig differenzierbar und u löst das Anfangswertproblem (1).

2. Sei u eine Lösung des AWP (1) auf dem Intervall I. Falls $f \in C^m(\Omega)$ für ein $m \geq 1$, dann ist $u \in C^{m+1}(I)$.

b.w.

Aufgabe 23: Das verbesserte Euler-Verfahren lautet:

$$U^0 = \eta, \quad U^{n+1} = U^n + kf(U^n + \frac{k}{2}f(U^n, t_n), t_n + \frac{k}{2}), \quad n = 0, 1, ...$$

Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des verbesserten Euler-Verfahrens für eine nichtautonome Differentialgleichung.

Aufgabe 24: Bestimmen Sie für das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 3u_1(t) + 4u_2(t) \\ u_2'(t) &= 5u_1(t) - 6u_2(t) \end{aligned}$$

die Lipschitz Konstante in der $\|\cdot\|_\infty$ und in der $\|\cdot\|_1$-Norm.

Abgabe am 19. Juni 2017 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 26. Juni 2017.