MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

29. MAI 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

# Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 6. Übungsblatt

**Aufgabe 15:** Wir wollen das RWP

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) \quad \text{auf } 0 \le x < 1 \\ u'(0) &= \sigma \\ u(1) &= \beta. \end{aligned}$$

unter Verwendung von *deferred correction* lösen. Wie muss das Gleichungssystem aufgestellt werden, damit wir ein Verfahren vierter Ordnung erhalten? Geben Sie zwei Möglichkeiten an.

**Aufgabe 16:** Wir wollen das RWP

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) \quad \text{auf } 0 < x < 1 \\ u(0) &= \alpha \\ u(1) &= \beta. \end{aligned}$$

mit einem FD-Verfahren 4. Ordnung approximieren.

(a) Implementieren sie das Finite-Differenzen-Verfahren vierter Ordnung

$$\frac{1}{12h^2}\left(-U_{j-2} + 16U_{j-1} - 30U_j + 16U_{j+1} - U_{j+2}\right) \quad j = 2, ..., m-1.$$

Da Sie die Formel in der Nähe des Randes nicht verwendet können, benutzen Sie dort die drei Alternativen:

(a)
$$\frac{1}{h^2}\left(U_0 - 2U_1 + U_2\right)$$

(b)
$$\frac{1}{12h^2}\left(11U_0 - 20U_1 + 6U_2 + 4U_3 - U_4\right)$$

(c)
$$\frac{1}{12h^2}\left(10U_0 - 15U_1 - 4U_2 + 14U_3 - 6U_4 + U_5\right)$$

Analog am rechten Rand.

(b) Implementieren Sie auch das aus der Vorlesung bekannte *deferred correction* Verfahren vierter Ordnung für Randwertprobleme mit Dirichlet Randbedingungen.

(c) Vergleichen Sie die vier Verfahren anhand des RWPs

$$\begin{aligned} u''(x) &= -4\pi^2 * \cos(2\pi x) - sin(x) \quad \text{auf } 0 \le x < 1 \\ u(0) &= 1 \\ u(1) &= \sin(1) + 1. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils experimentell die Konvergenzrate der Verfahren (EOC).

b.w.

**Aufgabe 17:** Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) &= f(x) \quad \text{auf } 0 \leq x < 3 \\ u'(0) &= \sigma \\ u(3) &= \beta. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Randwertproblems kann mit den Greenschen Formeln in Integralform exakt angegeben werden. (Die Lösung eines sehr ähnlichen Problems haben sie bereits in Aufgaben 7 und 12 gesehen.) Wir wollen nun den Ansatz der Spektralmethode mit einer exakten Integration vergleichen. Laden Sie sich dazu die Datei *bvp_spectral.m* unter *http://faculty.washington.edu/rjl/fdmbook/matlab/* herunter. In dem Programm benutzte Hilfsfunktionen finden Sie ebenfalls dort.

(a) Erweitern Sie die Methode *bvp_spectral.m*, indem Sie eine exakte Lösung des Randwertproblems mittels Greenscher Funktionen einbauen. Die Integrale können sie z.B. mithilfe des matlab Befehls *integral* auswerten.

(b) Vergleichen Sie den Aufwand der beiden Methoden, indem Sie jeweils eine Zeitmessung durchführen und die beiden Methoden in einem Zeit-Genauigkeit-Plot darstellen. Was stellen Sie fest?

**Aufgabe 18:** Es seien $u, f : \Omega \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $u, f \in C^\infty(\Omega)$. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei das Einheitsquadrat. Betrachte auf $\Omega$ die Poisson Gleichung $\Delta u = f$ mit Dirichlet Randbedingungen.

Wir benutzen ein gleichmäßiges kartesisches Gitter mit Gitterpunkten $(x_i, y_j)$, wobei $x_i = ih$, $y_j = jh$ sei. Für die Diskretisierung des Laplace-Operators verwenden wir den 9-Punkte-Stern (Mehrstellenformel)

$$\begin{aligned} \Delta_9 u_{i,j} := \frac{1}{6h^2} \Big[ & 4u_{i-1,j} + 4u_{i+1,j} + 4u_{i,j-1} + 4u_{i,j+1} \\ & + u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1} - 20u_{i,j} \Big] \end{aligned}$$

1. Sei $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$. Zeigen Sie, dass
$$\Delta_9 u_{i,j} = f_{i,j}$$
eine konsistente Approximation 2. Ordnung für die Poisson Gleichung ist.

2. Seien
$$\begin{aligned} F_{i,j} &= f_{i,j} + \frac{h^2}{12} \Delta_5 f_{i,j} \\ &= f_{i,j} + \frac{1}{12} \left( f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} - 4f_{i,j} \right). \end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass
$$\Delta_9 u_{i,j} = F_{i,j}$$
eine konsistente Approximation 4-ter Ordnung für die Poisson Gleichung ist.

**Aufgabe 19:** Das Matlab Skript `poisson.m`
`http://faculty.washington.edu/rjl/fdmbook/matlab/poisson.m`

approximiert das Poisson-Problem auf einem quadratischen Gebiet mit $m \times m$ Gitterpunkten ($\Delta x = \Delta y = h$ ) unter Verwendung des 5-Punkte-Sterns.

Machen Sie sich mit der Funktionsweise dieses Programms vertraut. Welches Randwertproblem wird approximiert?

Modifizieren Sie das Matlab Skript, so dass der 9-Punkte-Stern zur Diskretisierung des Laplace-Operators verwendet wird. Modifizieren Sie zusätzlich die rechte Seite (wie in Aufgabe 15, Teil [2.] beschrieben) um ein Verfahren 4. Ordnung zu erhalten.

Verifizieren Sie die Konvergenzrate des Verfahrens.

**Abgabe aufgrund des Feiertags am 5. Juni diesmal am 6. Juni bis 12 Uhr bei Frau Schmitz in 25.22.02.57 oder als pdf-File (ihre Programme schicken Sie bitte als .m Dateien) per Mail an david.kerkmann@uni-duesseldorf.de.**

**Besprechung in den Übungen ab 12. Juni 2017.**