MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

22. MAI 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 5. Übungsblatt

Aufgabe 13: (Diese Aufgabe gibt 12 Punkte.)
Machen Sie sich mit singulär gestörten Problemen und Randschichten vertraut. Einen guten Einstieg in das Thema bieten Kapitel 2.17 und 2.18 aus dem Buch *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems* von *Randall J. LeVeque*. Eine Onlineversion dieses Buches ist in siam aus dem Uninetz erhältlich.

Betrachten Sie dann das Randwertproblem

$$\begin{gathered} -\varepsilon u''(x) + u'(x) = 1 \quad \text{für } 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0 \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 3 \end{gathered}$$

mit der exakten Lösung

$$u(x) = 1 + x + \frac{e^{x/\varepsilon} - 1}{e^{1/\varepsilon} - 1}.$$

1. Zeigen Sie, dass die angegebene Lösung tatsächlich exakte Lösung des Randwertproblems ist.

2. Wir betrachten nun das Differenzenverfahren

$$-\varepsilon \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = 1$$

auf einem äquidistanten Gitter. Implementieren Sie dieses Verfahren und stellen Sie die numerische Lösung zusammen mit der exakten Lösung für $\varepsilon = 0.01$ und $m = 5, 10, 20, 40, 80$ graphisch dar.

3. Testen Sie auch den Ansatz

$$u'(x_i) \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{h}$$

zur Approximation der ersten Ableitung. Was stellen Sie für niedrige m fest? Stellen Sie analog zu Teil 12.2 die numerische Lösung graphisch dar.

4. Wie Sie in 12.2-12.3 sehen, ist die Lösung in der Nähe des rechten Randes ungenau. Daher soll der rechte Rand nun besser aufgelöst werden. Dazu wollen wir ein adaptives Gitter benutzen. Dies ist ein Gitter, das die Randschicht feiner auflöst, also mit mehr Gitterpunkten belegt. Wählen Sie nun ein adaptives Gitter, das sich besser für dieses Problem eignet (dazu können sie sich z.B. der Funktion *xgrid* bedienen). Beide Ableitungen sollen dabei durch finite Differenzen der Form

$$u^{(j)}(x_i) \approx c_{1,j}U_{i+1} + c_{2,j}U_i + c_{3,j}U_{i-1}, \quad j = 1, 2$$

approximiert werden. Stellen Sie analog zu Teil 12.2 die numerische Lösung graphisch dar.
Hinweis: Zur Bestimmung der Koeffizienten können Sie das Programm *fdcoeffF.m* unter *http://faculty.washington.edu/rjl/fdmbook/chapter2.html* nutzen.

5. Bestimmen Sie zu allen Verfahren den Fehler und bestimmen Sie experimentell die Konvergenzrate des Verfahrens. Stellen Sie Ihre Ergebnisse übersichtlich in einer Tabelle dar.

b.w.

Aufgabe 14: Wir betrachten auf $[0,1]$ das Randwertproblem

$$-\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

mit $u(0) = u(1) = 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$ und Funktionen $c, b : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $c(x) \geq \lambda > 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Für die Diskretisierung benutzen wir ein äquidistantes Gitter mit $h = 1/(m+1)$. Zeigen Sie, dass das Differenzenverfahren

$$-\varepsilon \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + \frac{b_i}{h} \left\{ \begin{array}{lcl} U_i - U_{i-1} & : & b_i \geq 0 \\ U_{i+1} - U_i & : & b_i < 0 \end{array} \right\} + c_i U_i = f_i, \quad U_0 = U_{m+1} = 0$$

bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm gleichmäßig in ε stabil ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Koeffizientenmatrix des Finiten-Differenzen-Verfahrens diagonaldominant ist. Wie können Sie daraus die Stabilitätsaussage folgern?

Abgabe am 29. Mai 2017 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 5. Juni 2017.