MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

15. MAI 2017

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 10: Beweisen Sie Lemma 2.17 der Vorlesung.

Aufgabe 11: Betrachten Sie die in der Vorlesung vorgestellte Pendelgleichung

$$\begin{aligned} \theta''(t) &= -\sin(\theta(t)), \\ \theta(0) &= \alpha, \\ \theta(2\pi) &= \alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Wählen Sie ein äquidistantes Gitter und betrachten Sie die Diskretisierung

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}(\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}) + \sin(\theta_i) = 0, \quad i = 1, ..., m, \\ \theta_0 = \alpha, \\ \theta_{m+1} = \alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Dies ist ein nichtlineares Gleichungssystem der Form $G(\theta) = 0$, $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.
Implementieren Sie für diese Gleichung das Newton-Verfahren

$$\begin{aligned} \theta^{[k+1]} &= \theta^{[k]} + \delta^{[k]}, \\ J(\theta^{[k]})\delta^{[k]} &= -G(\theta^{[k]}), \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $\theta^{[k]}$ eine Näherung an θ im Schritt k darstellt und J die Jacobi-Matrix der Funktion G ist. Wählen Sie die konstante Startlösung $\theta_i^{[0]} = 0.7 \quad \forall i = 0, ..., m+1$. Plotten Sie ihre Lösung nach einigen Newton-Schritten und geben Sie $||\delta^{[k]}||_\infty = \max(|\delta^{[k]}|)$ aus. Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, besitzt dieses Randwertproblem keine eindeutige Lösung. Wählen Sie mindestens eine weitere Startlösung, sodass sich eine andere Lösung ergibt, und plotten Sie auch diese.

b.w.

Aufgabe 12: In Aufgabe 7 haben Sie die Lösung des Randwertproblems $u''(x) = f(x), u'(0) = \sigma, u(1) = \beta$, mittels der Greenschen Funktionen gesehen. Die Lösung lautete

$$u(x) = \sigma x - \sigma + \beta + (x-1)\int_0^x f(\bar{x})d\bar{x} + \int_x^1 f(\bar{x})(\bar{x}-1)d\bar{x}. \tag{4}$$

Diese Lösung motiviert ein numerisches Verfahren: Dabei wird Gleichung (4) auf einem gegebenen Gitter $x_j,\ j = 0, ..., m$ ausgewertet. Die Integrale sollen mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel berechnet werden, d.h.

$$\int_0^{x_j} f(\bar{x})d\bar{x} \approx \sum_{i=0}^{j-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \tag{5}$$

und

$$\int_{x_j}^1 f(\bar{x})(\bar{x}-1)d\bar{x} \approx \sum_{i=j}^{m-1} \frac{f(x_i)(x_i - 1) + f(x_{i+1})(x_{i+1} - 1)}{2}. \tag{6}$$

Betrachten Sie erneut das Beispiel aus Aufgabe 9:

$$\begin{aligned} u''(x) &= \exp(x) \quad \text{auf } 0 \leq x < 1 \\ u'(0) &= 0 \\ u(1) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie ein Programm, dass die Lösung mit Hilfe dieses Verfahrens berechnet.

(b) Erweitern Sie ihr Programm, sodass nun eine zweite Lösung mit Hilfe der zentrierten finiten Differenz zweiter Ordnung berechnet wird.

(c) Benutzen Sie nun mehrere Gitter und berechnen Sie auf diesen jeweils die Zeit ihrer beiden Methoden und deren Fehler. Erstellen Sie einen Plot, der den Fehler gegenüber der Zeit der Methoden darstellt. Welche Methode eignet sich besser?

Abgabe am 22. Mai 2017 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 29. Mai 2017.