Mathematisches Institut

Prof. Dr. Christiane Helzel
David Kerkmann

1. Mai 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 2. Übungsblatt

Aufgabe 4: Sei $u''(x) = f(x), u(0) = u(1) = 0$ und $h = 0.25$.

(a) Sei A die Matrix aus dem Gleichungssystem $AU = F$ nach Gleichung (2.6). Das Gitter bestehe aus fünf äquidistanten Punkten mit $U_0 = u(0)$ und $U_4 = u(1)$. Schreiben Sie A aus und bestimmen Sie ihre Inverse.

(b) Wie sähe das Gleichungssystem und insbesondere die Matrix aus, wenn die Randwerte nicht direkt auf die rechte Seite F gebracht würden?

(c) Sei $f(x) = x$. Bestimmen Sie die diskrete Lösung des Randwertproblems mit der gegebenen Finite-Differenzen-Approximation und dem gegebenen Gitter. Geben Sie außerdem die exakte Lösung der Gleichung an und vergleichen Sie die beiden Lösungen, indem Sie den globalen Fehler auf dem Gitter angeben. Begründen Sie, warum der Fehler diese spezielle Form hat!

Aufgabe 5: In Beispiel 1.2 der Vorlesung wird $u''(x_2)$ durch die Auswertung der zweiten Ableitung des Interpolationspolynoms aus x_1, x_2 und x_3 berechnet. Dies soll nun auf dem ganzen Gitter $x_0, x_1, ..., x_{m+1}$ geschehen, d.h. $u''(x_i)$ soll ebenso durch x_{i-1}, x_i und x_{i+1}, $i = 1, ..., m$, berechnet werden. Der lokale Abbruchfehler dieser Approximation ist $\tau_i = \frac{1}{3}(h_i - h_{i-1})u'''(x_i) + \mathcal{O}(h^2)$, wobei $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ und $h_i = x_{i+1} - x_i$. Die Approximation ist also nur von erster Ordnung, falls h_{i-1} und h_i in $\mathcal{O}(h)$ sind, aber $h_{i-1} \neq h_i$.

(a) Sei $x_i = X(z_i)$, wobei $z_i = ih$ für $i = 0, 1, ..., m+1$ ein äquidistantes Gitter mit Schrittweite $h = \frac{1}{m+1}$ ist und $X(z)$ eine glatte Abbildung des Intervalls $[0, 1]$ auf das Intervall $[a, b]$ ist. Zeigen Sie, dass der Abbruchfehler dann von der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ ist, falls $X(z)$ glatt genug ist.
Hinweis: Zeigen Sie $x_i - x_{i-1} \approx hX'(z_i)$.

(b) Es sollen nun verschiedene Gitter auf ihre Genauigkeit überprüft werden. Laden Sie sich dazu die Datei *xgrid.m* unter folgendem Link herunter:
http://faculty.washington.edu/rjl/fdmbook/matlab/xgrid.m
Schreiben Sie ein Programm, dass die in Beispiel 1.2. verwendete Approximation für alle fünf in *xgrid.m* gewählten Verfahren und die Anzahl an Gitterpunkten $m = 10, 20, 40, 80, 160$ für das Beispiel $u(x) = \sin(x) - 4\cos(x)$ auf $[a, b] = [0, 1]$ durchführt.
Geben Sie die jeweilige Fehlernorm $\|\tau\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |\tau_i|$ an.
Plotten Sie weiterhin den Fehler in Abhängigkeit von m in einem Plot mit logarithmischen Achsen. Fügen Sie eine Legende hinzu, sodass man erkennt, welche Kurve zu welchem Gitter gehört.
Für konvergente Verfahren und kleine h erwarten wir einen globalen Fehler $\|E(h)\| \approx Ch^p$. Wie groß ist der Fehler dann für $h/2$? Überlegen Sie sich, wie aus zwei (oder mehr) verwendeten Schrittweiten eine experimentelle Konvergenzrate p bestimmt werden kann.

Schicken Sie ihr kommentiertes Programm bis zum Abgabetermin an *david.kerkmann@uni-duesseldorf.de*.

Aufgabe 6: Beim Aufstellen eines Finite-Differenzen-Verfahrens mit zentrierten Differenzen und periodischen Randwertbedingungen ergibt sich die Matrix

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)} \qquad \text{für } m \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix A die Eigenwerte $\lambda_p = \frac{2}{h^2}(cos(2\pi ph) - 1)$ und die dazugehörigen Eigenvektoren u^p mit Komponenten $u_j^p = e^{2\pi ipjh}$ besitzt.

Abgabe am 8. Mai 2017 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 15. Mai 2017.