

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 11. Übungsblatt

**Aufgabe 39:** Untersuchen Sie die folgenden linearen MSV auf Konvergenz.

(a)  $U^{n+2} = \frac{1}{2}U^{n+1} + \frac{1}{2}U^n + 2kf(U^{n+1})$

(b)  $U^{n+1} = U^n$

(c)  $U^{n+4} = U^n + \frac{4}{3}k(f(U^{n+3}) + f(U^{n+2}) + f(U^{n+1}))$

(d)  $U^{n+3} = -U^{n+2} + U^{n+1} + U^n + 2k(f(U^{n+2}) + f(U^{n+1})).$

**Aufgabe 40:** Zeigen Sie, dass das Gebiet absoluter Stabilität für die Mittelpunkregel

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2kf(U^n)$$

das offene Intervall  $(-i, i)$  ist.

**Aufgabe 41:** Beweisen Sie Lemma 5.8 der Vorlesung!

Hinweis: Sei  $\lambda$  Nullstelle von  $\rho(\zeta)$ , dann ist  $(\lambda^{r-1}, \lambda^{r-2}, \dots, 1)$  Eigenvektor der Matrix  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . D.h. die Eigenwerte von  $A$  sind Nullstellen von  $\rho(\zeta)$  und erfüllen die Wurzelbedingung.

Transformation in Jordansche Normalform liefert:

$$T^{-1}AT = J = \text{diag} \left( \lambda_1, \dots, \lambda_l, \left( \begin{array}{ccc} \lambda_{l+1} & \varepsilon_{l+1} & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_{r-1} \\ & & & \lambda_r \end{array} \right) \right),$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  einfache Eigenwerte mit Betrag 1 sind. Es gilt  $\|J \otimes Id\|_\infty \leq 1$ .

Unter Verwendung der Transformation  $T$  definieren wir die Vektornorm

$$\|x\| := \|(T^{-1} \otimes Id)x\|_\infty, T \in \mathbb{R}^{r \times r}, Id \in \mathbb{R}^{s \times s}.$$

**Aufgabe 42:** Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(1) \quad u'(t) = \lambda(u(t) - \cos(t)) - \sin(t)$$

mit Anfangswert  $u(0) = 1.5$  und  $\lambda = -10^6$ . Die exakte Lösung lautet:

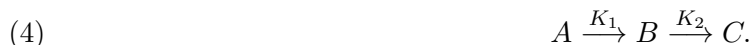
$$(2) \quad u(t) = \frac{1}{2}e^{\lambda t} + \cos(t)$$

- (a) Verwenden Sie das explizite Euler-Verfahren, um die Lösung bis zum Zeitpunkt  $T = 3$  zu bestimmen. Welche ungefähre maximale Schrittweite können Sie wählen, damit das Verfahren stabil bleibt?
- (b) Verwenden Sie nun das implizite Euler-Verfahren sowie die Trapezregel. Was stellen Sie fest? Begründen Sie Ihre Beobachtungen.
- (c) Das TR-BDF2 Verfahren lautet:

$$(3) \quad \begin{aligned} U^* &= U^n + \frac{k}{4}(f(U^n) + f(U^*)), \\ U^{n+1} &= \frac{1}{3}(4U^* - U^n + kf(U^{n+1})). \end{aligned}$$

Implementieren Sie auch dieses Verfahren. Was ist der Vorteil gegenüber dem impliziten Euler-Verfahren?

**Aufgabe 43:** Wir betrachten zunächst den Reaktionsmechanismus



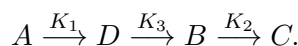
Dieser Reaktionsmechanismus wird durch das lineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -K_1 u_1(t) \\ u_2'(t) &= K_1 u_1(t) - K_2 u_2(t) \\ u_3'(t) &= K_2 u_2(t) \end{aligned}$$

modelliert. Dabei bezeichnet  $u_1 = [A]$  die Konzentration der Spezies  $A$ , und  $u_2 = [B]$ ,  $u_3 = [C]$  die Konzentrationen von  $B$  und  $C$ .

Das File `decay1.m` approximiert diese lineare System für  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 2$  mit Anfangsdaten  $u_1(0) = 1$ ,  $u_2(0) = 0$ ,  $u_3(0) = 0$ .

- (a) Verwenden Sie `decaytest.m` (<http://faculty.washington.edu/rjl/fdmbook/matlab/>) um festzustellen, wieviele Funktionsauswertungen für die vier verschiedene im Programm verwendeten Fehlertoleranzen benötigt werden.
- (b) Betrachten Sie nun den Reaktionsmechanismus



Modifizieren Sie `decay1.m` um diesen Reaktionsmechanismus zu approximieren. Setzen Sie dazu  $u_4 = [D]$  und verwenden Sie  $u_4(0) = 0$ . Testen Sie Ihr Programm für  $K_3 = 3$ .

- (c) Für  $K_3 \gg K_1, K_2$  erwarten wir, dass die Lösungskurven für  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  den Lösungskurven aus (a) ähneln. Warum?
- (d) Testen Sie `ode113` mit  $K_3 = 1000$  und den in `decaytest.m` angegebenen Toleranzen. Sie sollten dabei die folgenden Beobachtungen machen:
  - (i) Die Zahl der Funktionsauswertungen ist viel größer als bei der Approximation von (1) (vergl. mit Teil (a)), obwohl die Lösungen nahezu identisch sind.
  - (ii) Die Anzahl der Funktionsauswertungen verändert sich kaum wenn man die Toleranz reduziert.

Begründen Sie diese Beobachtungen.

- (e) Zeichnen Sie die Lösungen für Teil (d) mit `tol=1e-2` und `tol=1e-4`.
- (f) Testen Sie Ihr Programm für verschiedene Werte von  $K_3$  ( $K_3 = 500, 1000$  und  $2000$ ) und `tol = 1e-6`. Sie sollten dabei beobachten, dass die Anzahl der benötigten Funktionsauswertungen linear mit  $K_3$  anwächst. Begründen Sie, warum man dieses Verhalten erwarten kann. Wieviele Funktionsauswertungen würde man für  $K_3 = 10^7$  benötigen?
- (g) Wiederholen Sie Teil (f) unter Verwendung der Matlab-Routine `ode15s` statt `ode113`. Erklären Sie, warum die Zahl der Funktionsauswertungen nun viel kleiner ist und etwa konstant für große Werte von  $K_3$ . Testen Sie auch  $K_3 = 10^7$ .

**Abgabe am 17. Juli 2017 am Beginn der Vorlesung.**  
**Besprechung in den Übungen ab 24. Juli 2017.**