MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. CHRISTIANE HELZEL
DAVID KERKMANN

3. JULI 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 10. Übungsblatt

Aufgabe 34: Bei einem Mehrschrittverfahren p-ter Ordnung erhält man bereits die volle Ordnung, falls die Startwerte mit einem Verfahren der Ordnung $p-1$ berechnet werden.

Verifizieren Sie diese Behauptung, indem Sie U^1 unter Verwendung des expliziten Euler Verfahrens und $U^2, U^3, \dots$ mit Hilfe der Mittelpunktregel

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2kf(U^n)$$

berechnen.

Schreiben Sie ein Matlab Programm und wenden Sie es auf eine einfache ODE an. Überprüfen Sie auf diese experimentelle Weise, dass der beschriebene Ansatz eine Approximation zweiter Ordnung liefert.

Aufgabe 35:

(a) Wenden Sie die Trapezregel auf die Gleichung $u' = \lambda u$ an und zeigen Sie, dass

$$U^{n+1} = \left(\frac{1+z/2}{1-z/2}\right) U^n$$

mit $z = \lambda k$ gilt.

(b) Sei

$$R(z) = \frac{1+z/2}{1-z/2}.$$

Zeigen Sie, dass $R(z) = e^z + \mathcal{O}(z^3)$ gilt und folgern Sie, dass der Einschritt-Fehler der Trapezregel für dieses Problem $\mathcal{O}(z^3)$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie die geom. Reihe für $\frac{1}{1-z/2}$ und multiplizieren Sie mit $(1 + z/2)$.

b.w.

Aufgabe 36:

(a) Zeigen Sie, dass das Verfahren aus Beispiel 4.34 Konsistenzordnung 2 besitzt.

(b) Die Prediktor-Korrektor Methode bestehend aus dem 2-Schritt Adams-Bashforth Verfahren als Prediktor und dem 2-Schritt Adams-Moulton Verfahren als Korrektor besitzt Konsistenzordnung 3. Implementieren Sie dieses Verfahren und testen Sie es an folgendem Beispiel. Verwenden Sie für den ersten Schritt ein Verfahren zweiter Ordnung. Plotten Sie ihr Ergebnis in einen 3d-Plot.

$$\frac{dx}{dt} = -Px + Py$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}, T = 250, k = 0.01.$

Aufgabe 37: Es seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$ Nullstellen der Vielfachheit $m_1, \ldots, m_l$ des charakteristischen Polynoms $\rho(\zeta)$.

Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$\alpha_0 U^n + \alpha_1 U^{n+1} + \ldots + \alpha_r U^{n+r} = 0$$

die Form

$$U^n = p_1(n)\zeta_1^n + \ldots + p_l(n)\zeta_l^n$$

hat. Dabei seien die $p_j(n)$ Polynome vom Grad $m_j - 1$.

Aufgabe 38: Eine Fibonacci Folge erhält man durch die Bildungsvorschrift

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

Zeigen Sie, dass für große n das Verhältnis F_n/F_{n-1} gegen den goldenen Schnitt ($\phi \approx 1.618034$) strebt.

Abgabe am 10. Juli 2017 am Beginn der Vorlesung.
Besprechung in den Übungen ab 17. Juli 2017.