Mathematisches Institut

Prof. Dr. Christiane Helzel
David Kerkmann

24. April 2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Koeffizienten eines Finiten-Differenzen-Verfahrens mit fünf Koeffizienten

$$u''(x) \approx c_1 u(x-3h) + c_2 u(x-2h) + c_3 u(x-h) + c_4 u(x) + c_5 u(x+h).$$

Gehen Sie dabei analog zu Bsp. 1.4 vor. Die Taylor-Entwicklung können sie auch mit Maple durchführen.

Aufgabe 2: Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion. Wir betrachten die Funktion auf einem gegebenen Intervall $[a, b]$. Gegeben sei ein äquidistantes Gitter $x_i,\ i = 0...n$ mit $x_0 = a$ und $x_n = b$, d.h. $x_i - x_{i-1} = h\ \forall i = 1...n$. Die Werte u_i stellen Approximationen an die Punktwerte $u(x_i)$ dar. Im Folgenden sei $u_i = u(x_i)$.

(a) Bestimmen Sie eine Approximation vierter Ordnung an $u''(x_i)$ unter Benutzung der Punktwerte $u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}$. Eine Approximation zweiter Ordnung mithilfe der Werte u_{i-1}, u_i, u_{i+1} haben Sie bereits in der Vorlesung gesehen.

(b) Durch

$$U_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x)dx \qquad (1)$$

ist der Durchschnittswert von u auf dem Interall $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ gegeben. Bestimmen Sie eine Beziehung zwischen den Punktwerten u_i und den Durchschnittswerten U_i. Geben Sie mindestens die ersten zwei von Null verschiedenen Summanden der entstehenden Transformation explizit an.

(c) Bestimmen Sie nun eine Approximation zweiter und vierter Ordnung an $u''(x_i)$ unter Benutzung der Durchschnittswerte U_{i-1}, U_i, U_{i+1} bzw. $U_{i-2}, U_{i-1}, U_i, U_{i+1}, U_{i+2}$. Unterscheiden sich die Formeln von denen aus Aufgabe (a)?

b.w.

Aufgabe 3: Wir betrachten Finite-Differenzen-Approximationen der Form

$$u^{(k)}(\overline{x}) = c_0 u(x_0) + c_1 u(x_1) + \ldots + c_n u(x_n).$$

Die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_n$ sollen nach der Methode von Fornberg berechnet werden. Diese rechnet effizient nicht nur die Koeffizienten der gewünschten Ableitung, sondern auch aller niedrigeren Ableitungen aus.

Zur Herleitung der Methode betrachtet man das Lagrange-Interpolationspolynom

$$p_j(x) = \sum_{i=0}^{j} L_{i,j}(x) u_i \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

mit

$$L_{i,j}(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_j)}{(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_j)} \tag{2}$$

und benutzt die Approximation

$$u^{(k)}(x)|_{x=0} \approx \frac{d^k p_j(x)}{dx^k}|_{x=0}.$$

1. Zeigen Sie: Es gilt

$$\begin{aligned} L_{i,j}(x) &= \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} L_{i,j-1}(x), \\ L_{j,j}(x) &= \left(\frac{\prod_{\nu=0}^{j-2}(x_{j-1} - x_\nu)}{\prod_{\nu=0}^{j-1}(x_j - x_\nu)} \right) (x - x_{j-1}) L_{j-1,j-1}(x). \end{aligned}$$

2. Es sei $c_{i,j}^k := \frac{d^k L_{i,j}(x)}{dx^k}|_{x=0}$. Beweisen Sie die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} c_{i,j}^k &= \frac{1}{x_j - x_i} \left(x_j c_{i,j-1}^k - k c_{i,j-1}^{k-1} \right), \\ c_{j,j}^k &= \left(\frac{\prod_{\nu=0}^{j-2}(x_{j-1} - x_\nu)}{\prod_{\nu=0}^{j-1}(x_j - x_\nu)} \right) \left(k c_{j-1,j-1}^{k-1} - x_{j-1} c_{j-1,j-1}^k \right). \end{aligned}$$

3. Zeigen Sie, dass $c_{0,0}^0 = 1$ gilt.

4. Beschreiben Sie den in der Funktion `weights` implementierten Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten der Finiten-Differenzen-Approximation. Diese finden Sie auf der Website der Vorlesung.

5. Nutzen Sie die Funktion `weights` zur Berechnung der Koeffizienten

$$u''(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{5} c_n u(x_n)$$

mit $\bar{x} = 0.5$, $x_0 = 0.2$ und $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{3n}$.

Abgabe aufgrund des Feiertags am 1. Mai diesmal am 2. Mai bis 12 Uhr bei Frau Schmitz in 25.22.02.57 oder als pdf-File per Mail an david.kerkmann@uni-duesseldorf.de.

Besprechung in den Übungen ab 8. Mai 2017.